



把科技馆带回家

丛书主编 / 徐延豪

丛书副主编 / 杨文志 束为 殷皓 苏青

华夏之光

中国古代数学

王学志 王 爽 张文娟 / 编著



科学普及出版社
· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

中国古代数学 / 王学志, 王爽, 张文娟编著. — 北京: 科学普及出版社, 2021.2

(把科技馆带回家)

ISBN 978-7-110-10154-4

I. ①中… II. ①王… ②王… ③张… III. ①数学史—中国—古代—青少年读物 IV. ①O112-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第177630号

策划编辑	郑洪炜 牛奕
责任编辑	郑洪炜
封面设计	佳木水轩
正文设计	金彩恒通
责任校对	邓雪梅
责任印制	马宇晨

出版	科学普及出版社
发行	中国科学技术出版社有限公司发行部
地址	北京市海淀区中关村南大街16号
邮编	100081
发行电话	010-62173865
传真	010-62173081
网址	http://www.cspbooks.com.cn

开本	710mm×1000mm 1/16
字数	100千字
印张	8
印数	1—5000册
版次	2021年2月第1版
印次	2021年2月第1次印刷
印刷	北京盛通印刷股份有限公司
书号	ISBN 978-7-110-10154-4/0·195
定价	39.80元

(凡购买本社图书, 如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责调换)

编委会

《把科技馆带回家》丛书编委会

顾 问 齐 让 程东红

主 任 徐延豪

副 主 任 杨文志 束 为 殷 皓 苏 青

成 员 (按姓氏笔画排序)

吕建华 苏 青 李其震 杨文志 杨虚杰 束 为

辛 兵 陈明晖 纳 翔 欧建成 郑洪炜 赵有利

徐延豪 殷 皓 黄体茂 隗京花 颜 实

丛 书 主 编 徐延豪

丛 书 副 主 编 杨文志 束 为 殷 皓 苏 青

统 筹 策 划 郑洪炜

《华夏之光》系列编委会

主 编 赵 洋

副 主 编 崔希栋 张 瑶

成 员 王 爽 张文娟 马若涵 戴天心 陈 康 常 铖

张 瑶 安 娜 赵 洋 王学志 袁 辉 李广进

张梓雍 苏文轩

《中国古代数学》

作 者 名 单 王学志 王 爽 张文娟

主编的话

亲爱的读者朋友，现代科技馆为您营造了体验科学、启迪创新的绝美情境，在这里，您不仅可以学习科学原理和科学结论，还可以了解科学研究的方法和科学推演的过程；您不仅可以领略科技给日常生活带来的舒适和便利，还可以展望科技对未来社会产生的影响和愿景；您不仅可以体会科学的严谨和艰辛，还可以欣赏科学的美妙和浪漫……当您参观完中国科学技术馆等科技场馆，想必依然意犹未尽，渴望把参观的内容沉淀下来，带回家好好咀嚼、反复回味。

《把科技馆带回家》就是为了满足您的这个愿望而专门编辑出版的一套大型科普丛书。这套丛书以中国科学技术馆等大型科技场馆中的经典展项和品牌展教活动为切入点，充分发挥科普图书载体的呈现优势，立足场馆，超越场馆，既充分展示并深度开发了科技场馆中的优质科普资源，又对科技场馆中已有科普资源予以了积极拓展和有效延伸，可谓带回家的一个书本科科技馆。

根据《全民科学素质行动计划纲要》要求，我国城区常住人口100万以上的大城市至少应拥有1座科技类博物馆。未来，科技场馆凭借其科普资源独特的整合、呈现优势，必将在提高全民科学素质工作中发挥更加重要的作用，《把科技馆带回家》丛书由此也将为全民科学素质提升作出更加积极的贡献。

亲爱的读者朋友，我们希望通过编辑出版《把科技馆带回家》丛书，把科技场馆中精彩纷呈的科普内容不断呈现给您，和您一道开启体验科学、启迪创新的探索之旅，共同分享科学与人文结合给我们心智成长带来的精神滋养。我们更希望通过这套丛书的出版，听取您对繁荣中国原创科普图书出版的更多中肯意见，共同把《把科技馆带回家》打造成为广大读者喜爱的精品科普图书。

中国科学技术协会书记处书记

徐延豪

2020年8月

目录

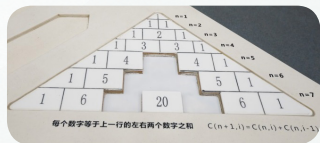
从“记数”到“算术”

伟大的发明——记数	2
隶首是华夏发明数字的第一人吗	2
用数字表达宇宙的成就	4
最妙的发明之“中国数制”	8
世界多样记数方法	9



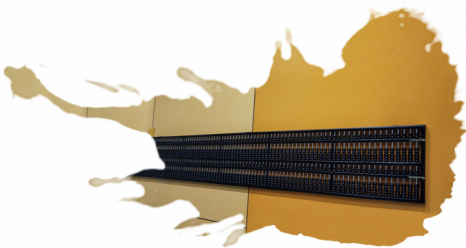
精简的中国计算技巧与计算工具	12
《九九歌》巧助招英才	12
策、筹、珠的演变	14
“音乐之美”与“十二等程律”	19
影响世界的中国古典数学	21

求和计算公式的发明之路	24
智斗贪婪地主	24
数列求和解难题	25
富有创造性的求和法	27
世界共通的求和计算公式	30

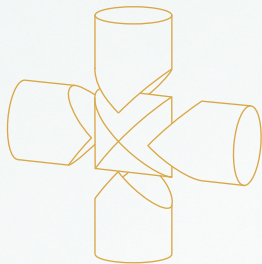


源于生活的几何

古代的面积计算方法	32
“数学天分的展现”之“巧算羊圈”	32
因“田”产生的几何图形面积公式	33

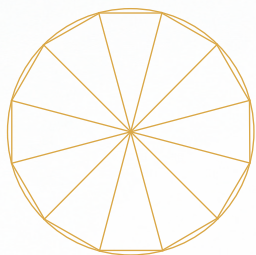


出入相补原理	35
海伦公式与三斜求积术	38



古代的体积计算方法	41
古代实际生活中的体积计算	41
柱、锥、台的体积计算	41
球体体积与牟合方盖	46
中世纪中国数学的辉煌成就	49

数学发展水平的标志——圆周率	51
有趣高效的谐音记忆法	52
不曾停止的圆周率计算	52
用刘徽割圆术求圆周率	54
用极限思想解决数学难题	56
展品链接——圆周率的计算	57

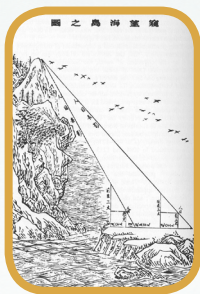


数学典籍与经典问题

《九章算术》与解线性方程组	60
古代方程术与现代方程组	61
让实际问题算术化的巨著	63
“直除法”和“正负术”的开创	64
推动世界数学发展的《九章算术》	67
展品链接——九章算术	68

《周髀算经》与勾股定理	70
大禹治理华夏水患	70
勾股定理的起源和发展	72
勾股定理引领数学新发现	73
改变世界面貌的数学公式之首	74





《海岛算经》与重差术	76
以“古证复原”研究古代数学	77
重差术的来源之“测日法”	78
极高、极远目标如何测望	79

《孙子算经》与中国剩余定理	81
韩信点兵有妙计	82
如何解答“物不知其数”	83
极具创造性的中国剩余定理	84
成就璀璨的《孙子算经》	85

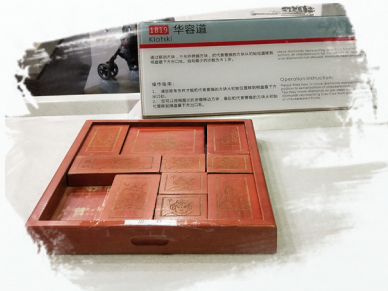
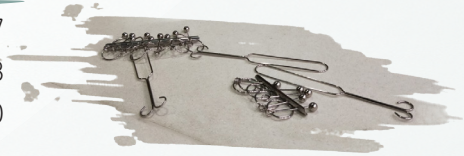


趣味古代益智游戏



神秘古老的纵横图	88
洛书是能与外星人沟通的信息吗	88
纵横图的源头活水	89
延续千年的纵横图探秘之路	94
令世界广泛尊崇的纵横图	96

不可思议的九连环	97
数字入诗续前缘	97
流传千年的九连环	98
化繁为简拆解九连环	100
影响世界的九连环	101



百玩不厌的华容道	103
曹操败走华容道	103
滑块游戏的演变	104
华容道游戏的八条规律	106
国外特色华容道	108

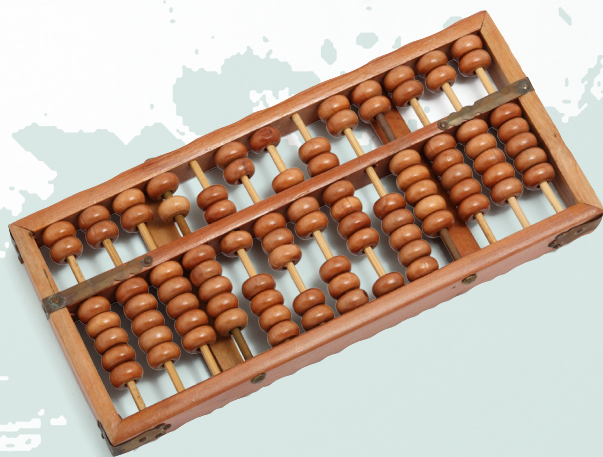
动手动脑的七巧板	111
简拼万物，深受喜爱	111
从“设宴餐桌”到“智力玩具”	112
精巧奥妙的益智图	114
令人惊奇的世界多样七巧板	115



参考文献	118
-------------------	-----

从“记数” 到“算术”

王 爽 / 文





伟大的发明——记数

隶首是华夏发明数字的第一人吗

相传在前 2697 年，黄帝战胜蚩尤统一中原各部落，并在泰山之巅举行封禅仪式，告祭天地，宣布正统。此后，黄帝带领先民耕种渔猎、发展生产，物质财富日益增加。负责部落仓库管理的官员一直用结绳记数的方法记录账目，以前生产力低下、物质匮乏时还应付得来，但现在收割的作物和猎获的野兽不断增加，给仓库的账目管理工作带来不小压力。

结绳记数法是通过在绳子上打结来进行数字记录。最简单的结绳用一个结表示“1”，之后发展为用绳结的大小及位置来表示不同的数位，用不同样式的结来表示不同的含义，或通过选用不同材质、不同颜色的绳子来区别、记数。一次，一位高明的猎手骄傲地交回 7 只山羊，可仓库工作

结绳记数





人员在忙乱中只在草绳上打了1个结，少打了6个结，这令猎手极为不满。还有一次，黄帝的孙女黑英领了9张虎皮，工作人员却只在草绳上打了6个结，少打了3个结，因为他数错了结节的个数。时间一长，仓库进出的账目越来越乱，虚报和冒领的情况也时有发生，黄帝为此大为苦恼。这时，有人向黄帝推荐部落里一位叫隶首的年轻人，说他善于计算、聪明好学，是解决仓库管理问题的合适人选，于是黄帝便任命隶首来管理仓库。

接受任务后，隶首反复实践、不断钻研，终于决定先从十个基本数值概念的建立入手，一方面给每个数值一个固定的概念，另一方面还给每个数值一个固定的名字，这样就能清晰明确地记录数目了。隶首的记数方法得到了黄帝的赞赏，他召开部落大会，让隶首教给大家十个数值的写法和计算方法，新的记数方法既简单又便捷，大家很快就学会了。运用这套方法，部落仓库的账目变得井井有条，人们的生活也方便了起来。时光流转，虽然这套数字没有流传下来，但后人仍然感念隶首创造数字的功劳，因此尊称他为“华夏发明数字的第一人”，这就是“隶首作数”的故事。后代曾以“隶首之学”代指数学，其影响之深远，由此可见一斑。

“隶首作数”的故事毕竟是传说，那么，数字究竟是如何产生的呢？
让我们来一探究竟吧！





用数字表达宇宙的成就

数的产生不能归功于一人一事。经过漫长的观察，人们认识到各种事物集合在量上具有共同的特征，便逐渐舍弃事物的具体内容而得到了抽象的数，这就是自然数产生的过程。正如 20 世纪英国数学家罗素所说：“不知要经过多少年，人类才发现‘一对锦鸡’和‘两天’同是数字‘2’的例子。”

地球上最早的人类出现在 250 多万年之前。人类自诞生之日起，便通过打猎和采集的方式谋生。群狼比孤狼意味着更大的危险，两棵果树比一棵果树意味着更多的果实，这些数的多少跟人们的生活密切相关，使人们逐渐产生了“数”的概念和“记数”的需求。经过漫长的发展，时至今日，我们可以自信地说，人类取得了用数字表达宇宙的惊人成就。

人类最早靠伸屈手指来记数。在全世界范围内，即使语言不同、文化各异，但 1 根手指都毫无疑问地表示“1”，以此类推，直到整个手掌的 5 根手指表示“5”。现在我们用“屈指可数”来形容数量稀少，可见手指记数的适用范围很小。当手指记录数目不能满足人们的使用需求时，其他记数工具和方法便逐渐产生了。

中国古代记数的方法有算具记数和文字记数。算具记数应用于有文字之前，形式有数石子、结绳和契刻，这些是最原始的记数方法。

人类在发展过程中逐渐摆脱身体的束缚，开始学习利用自然物辅助生产生活。大约在前 3000—前 2000 年，古人开始使用石子记数，这是古代各大文明都经历过的发展阶段。当有人狩猎到一只兔子，负责记数的人便



会在记录兔子数量的石堆里添一个石子，想要知道一段时间内猎得的兔子数量，数一数石子就知道了。相比于手指记数，石子记数的计量范围扩大了，但仍然受限于一定的计算规模和其他客观条件。

通过对自然界的不断改造，古人用藤条、树枝等自然物，通过简单加工制造出了用于捆绑物品的绳子。继而，通过在绳子上打结的方法来记录事物数量的多少，大事打大结，小事打小结，《周易》《老子》等古籍都记载了这种方法。我国商代甲骨文中“数”字的写法，就像用手拿绳在木棍上打结，可见记数与结绳的密切关系。除了在远古时期被使用，结绳记数在之后的很长一段历史时间内被许多没有文字的民族持续使用。宋代，由于靺鞨族没有文字，在打仗需要调发物资时，仍用以草打结的方式记录和发布信息，草结的数量就是所需物资的数量。相比于石子记数，结绳记数的方法更便捷，因此实现了远距离传达数字的功能，发挥了记数的重要作用。



不同样式的绳结



契刻记数是通过在物体上刻制痕迹来记录物品数量的方式。在北京周口店发现的山顶洞人遗址中，随着1万多年前的4个带有磨刻符号的骨管出土，人们发现了契刻记数方法的最早实物证据，在此之后直到封建社会的契刻记数实物都有出土。



甲骨文中的数字

3000多年前的殷商时期，用甲骨文中的9个数字与4个位置值符号可以表示大到上万的任何自然数，这之中已有位置值制的萌芽。

随着文字的出现，文字记数的方法开始得到应用。文字是语言的书面符号，与读音一致，例如把数字“235”写文字记数即为“二百三十五”。一至十、百、千、万13个记数文字出现在殷墟陶器和甲骨之上，说明文字记数体系已经完备。自3000多年前的商代直到今天，这13个记数文字的字形虽然有所变化，但记数方法却从未中断，中国人一直使用这些记数文字记录10万以内的任何自然数，而即使是现在，南美洲某些原始部落的人对于数的认知还只停留在1、2，最多到3，超过3时，则只能用“许多、很多、太多”来表示。

为方便记数，到前5世纪出现了一种叫“算筹”的记数工具。算筹有纵、横两种布筹方法。在纵式中，纵摆的每根算筹都代表1，数字1~5分别由1~5根算筹表示，6、7、8、9则由上下两部分组成，上面横摆1根代表5，



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
横式:	—	==	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥	≡≡	≡≡≡
纵式:						⊥	⊥	≡≡	≡≡≡

算筹记数方法

下面分别纵摆 1~4 根，使其和分别为 6、7、8、9。横式反之。

算筹是世界上最早使用位值制，同时又是十进位值制的数码体系。在表示一个多位数时，算筹把各位的数字按高位到低位从左向右横列，遇零用空位。同时，为了避免发生混乱，相邻两位之间要纵横相间，即个位和百位用纵式，十位和千位用横式，以此类推，便可以表示出任意大的自然数，并且各位界限分明、一目了然。例如数字“6728”便可以表示为“⊥ ⊥ = ≡ ≡”。零用空格表示。古人还通过算筹的颜色、形状或摆放方式来区分正负数。

现今国际通用的阿拉伯数字由 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 共 10 个记数符号组成，由 3 世纪的古印度人发明，后由阿拉伯人传入欧洲，再经欧洲人将其现代化并定型。16 世纪，在意大利数学家斐波那契的号召下，阿拉伯数字取代罗马数字在欧洲得到广泛应用。正是因阿拉伯人的传播，该种数字成为国际通用数字，因此人们称之为“阿拉伯数字”。阿拉伯数字采取位值法，高位在左，低位在右，从左往右书写。借助于小数点、百分比等符号，阿拉伯数字系统可以表示所有有理数。

阿拉伯数字传入我国大约在 13—14 世纪。由于我国有算筹表示数字，写起来比较方便，所以阿拉伯数字在传入之初并没有很快得到推广运用。



直到 20 世纪初，随着对外国数学成就的吸收和引进，阿拉伯数字才开始在我国得到推广使用，时至今日不过 100 多年的历史。

除正整数之外，负数在前 2 世纪已经开始在中国使用。用算筹表示负数时，红色或正放的算筹代表正数，黑色或斜放的算筹代表负数。欧洲使用负数则在 16 世纪，因为在此之前，欧洲人认为“0”就是“什么也没有”，而小于“0”的数则是“不可思议”的。分数在中国的使用比欧洲早了 1400 多年，在成书于前 1 世纪的算书《周髀算经》中，中国已经有用文字表示分数的记载。而对于 700 年前的欧洲人来说，分数之难简直“难于上青天”。当德国人形容一个人陷入绝境时，常用“他掉到分数里去了”的比喻来表达悲观，可见分数之于欧洲人的艰深程度。小数就是十进制分数，与分数同样重要。小数表示法在 1300 年前后出现在中国，直到 1585 年才在欧洲出现。

最妙的发明之“中国数制”

进位制是按照进位的方式实现记数的一种规则，同一个数可以用不同的进位制来表示。进位制指以 N 个数组成一个新的单位，用一个新的符号表示。 N 个新的单位又组成一个更高的单位，用另一个符号表示。我们便称其为“ N 进制”，称“ N ”为“进位的基”。位值制指同一数字在不同位置表示不同的数值，即它表示所在位置相应“单位”的一定倍数，如 5 在个位表示 5×1 ，在十位表示 5×10 ，在百位表示 5×100 ，不同单位的数字才有了相同的符号。一个数字表示什么数值，根据它所在的位置来判断，



这就是位值制。

随着人们对数的不断认知，发展出了二进制、五进制、十进制、十六进制等进制。以十进制为例，十进制就是以 10 为基的位值制记数法，记数原则是逢十进一，即任何一位的数字足够十个就构成了高一位的一个单位。我国自有文字始，一直采用十进制作为记数原则。商代殷墟甲骨卜辞上记载：“八日辛亥，允戈伐二千六百五十六人。”“二千六百五十六”用十进位值制记为“二六五六”，与现在的“2656”完全一致，这是我国使用十进制记数法的最早例证。

十进位值制记数法是古代世界最先进、最科学的记数法，也是现代世界通行的记数法。玛雅人采用二十进制，古巴比伦人则采用六十进制，相较十进制都复杂得多，而古印度直到 7 世纪才采用十进制，古罗马没有位值制。中国是世界上最早使用十进制的国家，对世界科学和文化的发展起到了不可估量的促进作用。马克思在他的《数学手稿》一书中称十进位记数法为“最妙的发明之一”，英国近代科技史专家李约瑟也表示：“如果没有十进位值制，就不可能出现我们现在这个统一化的世界了。”鉴于中国古人的巨大贡献，十进制甚至被称为“中国数制”。

世界多样记数方法

在世界范围内，受自然环境和社会条件的影响，产生了不同的记数方法。

生活在秘鲁的印第安人曾广泛使用结绳的方法来记事，这种方法被称



奇普记数

为“奇普”。人们用一根水平粗绳作为主绳，上面连接的许多不同颜色的垂直细绳作为辅绳。绳索的颜色和结绳方式及位置各有指代，不同颜色的辅绳代表不同的事物，不同类型、不同位置的绳结代表不同的数字，以此达到同时记事和记数的目的。直到今天，世界上仍有个别没有文字的民族在使用这种原始的记数方法。



古巴比伦记数符号

古巴比伦地区用泥板铭刻来记数，约始于前4000—前3000年。泥板坚硬易存，流传至今成为人类数学历史中的珍品。古巴比伦人记数时采用六十进位值制，依靠数码符号的依次排列相加表示数目。

古埃及最早的数码是石刻上的象形文字符号，它使用十进位非位值制方法记数，用特殊符号表示每一个较高的单位，记数时依次重复排列这些符号。后来由于纸草书写的需要演化出两种变体：僧侣符号和民间符号。它们在记数时均采用逐级命数法，即对个位数、100以内十的倍数、1000



以内百的倍数等数目都有专门的符号，避免了重复排列，使记数更为简洁。

古希腊最早的数码发现于克里特岛，是前 1500 年左右泥板上的象形文字，记数靠重复排列。约到前 6 世纪，发展出一种名为“阿提卡”的数码形式。5 世纪左右出现的爱奥尼亚字母记数法，已发展成逐级命数体系。古希腊记数法需要用 27 个希腊字母相互配合，才能表示出 1000 以内的数目。

古罗马数字只有 7 个基本符号，以数字“1982”为例，用古罗马记数法表示则为“MDCCCCLXXXII”。

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

古罗马记数法

古印度的书写材料是当地盛产的桦树皮和棕树叶，因不易保存，所以保留下来的史料很少。印度最早的数字见于前 2500 年，之后经历了多此演变。其中，8 世纪的德温那格里记数法最具代表性。印度数码约在 9 世纪传入阿拉伯地区，逐步发展为现在国际通用的阿拉伯数字。印度人也使用十进制记数法，而用符号“0”表示“零”更是一项伟大的发明。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	0

古印度德温那格里记数法



精简的中国计算 技巧与计算工具

《九九歌》巧助招英才

先秦时期，春秋五霸之首的齐桓公励精图治、锐意改革，设立招贤馆为齐国广招天下英才，但过了一年都无人应征。一天，一个相貌普通的人来到招贤馆应招，齐桓公在心里告诫自己不要以貌取人，相信他一定怀有绝技在身。因此，齐桓公非常礼貌地接见了这个人，想看看他的真本领。然而，在此人只是把记诵用于乘法计算的歌诀《九九歌》作为自己的才能展示之后，齐桓公非常失望，并用嘲讽的语气对他说：“难道会记诵《九九歌》也算是才能吗？”这个人却不慌不忙地答道：“记诵《九九歌》当然算不上才能，但如果您对我这个只懂得《九九歌》的普通百姓都能以礼相待并纳为贤才的话，还怕那些比我高明的人才不会接踵而来吗？”齐桓公听后如醍醐灌顶，马上依照礼仪将此人迎入招贤馆，并奉为上宾。果不其然，这件事很快流传开来，遗散在民间的人才一个个摩拳擦掌、跃跃欲试，招贤馆一时间门庭若市，四方贤达纷至沓来。他们各有所长、踌躇满志，辅佐齐桓公对内整顿朝政、厉行改革，对外尊王攘夷、北击南伐。君臣同心，最终成就霸业。



上文是汉代韩婴在其著作《韩诗外传》中记载的一则故事。这里提到的《九九歌》就是古代的乘法口诀，也是当今乘法口诀的最初状态。在当时，市井百姓都能记诵《九九歌》，可见其流传之深广。而在《荀子》《管子》《淮南子》和《战国策》等古代书籍中，都能找



汉代乘法口诀铭文砖及拓片

到“三九二十七”“六八四十八”“四八三十二”和“六六三十六”等口诀。可见至迟到春秋战国时期（前 770—前 221 年），中国人已经熟练掌握和应用《九九歌》了，而古希腊 1~9 的乘法表、古印度《九九表》则分别是在 1 世纪和 2 世纪才出现的。

目前，出土最早的《九九歌》实物契刻在汉代竹木简上。最初的《九九歌》是从“九九八十一”起，到“二二如四”止，共 36 句口诀。因为以“九九”开头，故称“九九歌”。后来，人们逐步把“一九如九”“一八如八”直至“一一如一”9 句加入，到南北朝时期形成 45 句。1274 年，为了符合人们“从小到大”的客观认识规律，宋代数学家杨辉在其著作《乘除通变本末》中首次把《九九歌》的顺序颠倒排列，即从“一一如一”起，到“九九八十一”止，但全文未列出。1299 年，元代数学家朱世杰在《算学启蒙》中首次列出了与现在顺序完全相同的《九九歌》全文，这就是现在人人熟知的《九九乘法表》。



利用《九九歌》能很快求出两个一位数相乘的积，也可以很快求出除数和商都是一位数的除法的商，成为四则运算的重要基础。《九九歌》堪称十进制记数法与中国语言文字的完美结合，这是任何其他记数法和语言文字所无法产生的。由于《九九歌》的重要性，“九九之术”在唐宋之际曾一度成为数学的代称。

“数学是科学的女王，而算术则是数学的女王”——世界三大数学家之一、享有“数学王子”之称的德国近代数学家高斯如是说。那么，就让我们哼唱着《九九歌》，慢慢揭开“数学女王”的神秘面纱吧！

策、筹、珠的演变

计算指根据已知数通过数学方法求得未知数的过程，计算是人类发展到一定程度时社会生活和生产实际的必然需求。数的记载与运算一直都是中国数学的主流，中国大约在商周时期已经有了加、减、乘、除四则运算，到春秋战国时期，整数和分数的四则运算已经相当完备，因此中国数学最早被称为“算学”。

你还记得小时候掰着手指数数儿的情景吗？这也许是每个人都有过的经历。用手指计算是人类在孩提时代最本能的计算反应，虽然手指能够计算的数目有限，且不能实现数字存储的功能，但手指计算仍然是人类有史以来使用时间最久远，并将一直持续使用的计算方法。

除此之外，目前已知中国最早的计算方法是筹算。根据出土文物判断，至迟在春秋时期，筹算已经得到了普及。筹算的发明与占卜有关，古代巫



师用一种叫“蓍草”的植物根茎来占卜，通过蓍草根数的变化来判断吉凶。占卜使用的蓍草根茎叫作“策”，占卜的过程就是计算的过程，因此用策进行的这种计算就叫“策算”。



蓍草

随着人们对计算需求的增多，专门用于占卜的“策算”逐渐演变为广泛应用于计算的“筹算”。筹算是一种计算方法，而用这种方法进行计算的工具叫作“算筹”。算筹的“算”字古代写作“筭”，据中国古代字典《说文解字》记载：“筭，从竹，从弄。”即为摆列竹棍进行计算的意思。除竹制之外，算筹还可以用木、玉石和象牙等材质制成。这些同样尺寸的小棍，一般长为13~14厘米，直径0.2~0.3厘米。算筹作为重要的计算工具，在古人的生活中十分重要。古人把算筹装在算袋中随身佩戴，便成了身份和地位的象征。有文献记载，秦始皇就曾佩戴算袋。汉代，佩戴算袋已经非常流行。到了唐代，算袋一度被规定为文武百官上朝时的必佩之物，以便随时进行计算和决策。直到14世纪，算筹一直是中国人最常用的计算工具。可以说正是算筹简便快



算筹（中国科学技术馆内展品）



捷的优点，造就了中国古代数学长于计算的特点。

算筹利用十进制和位进制进行计算。在计算时，将算筹放在桌上或地上排列开，加、减计算时直接添筹、减筹，乘、除计算时则借助于《九九歌》来进行。除了加、减、乘、除四则运算，算筹还可以完成乘方、开方、多元高次方程的计算。南北朝时期，数学家祖冲之就是利用算筹完成了圆周率的计算，这是他对于我国乃至世界数学界的一个巨大贡献，这其中算筹的功劳不可磨灭。

算筹作为最古老的计算工具，曾为古代社会的生产生活做出过巨大的贡献，但它也存在一些明显的不足之处。根据朝代不同，一套算筹的数量也不同。汉代算筹以271根为一套，元代则为91根。不但数量过多不便携带，而且计算场地也需要很开阔。另外，筹算采用“布筹改码”的方法，即通过挪动算筹的位置来完成每一步计算，虽然方便快捷，但计算的步骤却无法记录和保存下来，不仅出现了错误无法检查，学习起来也比较困难。因此，

即使元代数学家朱世杰能用筹算解四元高次方程，但终因方法过于复杂，最终导致后继无人。同时，抽象化的数学语言也未得到充分发展。筹算的改革从其简化开始，这个改革最终促成珠算盘的普及。

珠算盘是运用口诀通过手指拨动算珠进行加、减、乘、除和



珠算盘



珠算盘（中国科学技术馆馆内展品）

开方等运算的计算技术。珠算盘是由筹算演变而来的。筹算数字中，上面一根筹当“5”，下面一根筹当“1”，珠算盘中的上二珠一珠也当“5”，下五珠一珠也当“1”。由于筹算在乘法中会出现某位数字等于10或大于10的情形，所以珠算盘采用上二珠下五珠的形式。算筹在长期使用中演算方法逐渐简化，特别是算筹口诀的出现，使头脑的思维速度加快，而手动排列算筹显得更加迟缓，珠算盘便应运而生。在电脑出现之前，珠算盘是一种构造极其简单而又效率奇高的计算器。

珠算盘简称“珠算”或“算盘”，它的出现很早。远在高周时期，古人在筹算的基础上，发明了用珠子计算的方式，因其“以珠代筹”进行计算，故称“珠算”。东汉徐岳所撰《数术记遗》里记载了14种算具及算法，



其中一种就是“珠算”，这是“珠算”二字出现的最早实例。到了魏晋，珠算形式复杂化，出现了“盘”的雏形，因其“以盘盛珠”进行计算，故称“珠算盘”。唐宋时期，与当今基本一致的珠算口诀大量出现，使珠算能够做到“心到、口到、手到”，三者配合，运珠如飞，标志着完全意义上的算盘已经形成。宋代张择端名画《清明上河图》中出现了与现代算盘别无二致的算盘形象。元明时期，算盘逐渐取代算筹成为最主要的计算工具，下到客店酒肆，上到国家机关，都要借助于算盘来完成计算工作。18世纪，中国算盘和西方数学有了第一次交集，但相比于欧洲的笔算和计算尺，中国人依然钟情于携带方便、计算准确的算盘。同时，作为一门课程，珠算开始出现在国民教育体系当中。20世纪50年代以后的一段时间里，由于计算机尚未普及，算盘协助计算机完成了国家当时很多重大科研课题



《清明上河图》中柜台上的算盘

的精确计算。20世纪60年代，我国自主研发了第一颗原子弹。由于当时只有一台计算机，庞大的计算任务仍需依靠算盘来完成，算盘这种古老的计算工具为制造原子弹提供了准确无误的数据。2009年，英国《独立报》评选出101项改变世界

的小发明，中国算盘以“迄今为止，用算盘做加法的速度依然可以超过电子计算器”的评选理由而高居榜首。2013年，联合国教科文组织正式批准中国珠算列入教科文组织“人类非物质文化遗产名录”。



除了乘法口诀，珠算还有加法口诀和除法口诀。各类口诀简单易记、朗朗上口，即使不识字的人也可以通过记诵口诀成为一名算盘高手。珠算被认为是人类最早利用工具代替人脑进行复杂计算的例证，它的运算过程蕴含着数学发展的机械化思想。机械化思想与方法是世界数学发展的主要倾向之一，珠算使中国古典数学在很长一段历史时期内一直占据世界数学发展的主流地位。

“音乐之美”与“十二等程律”

人类的三大乐器类别为弦乐、管乐和打击乐，三者虽各有其来源，但音律系统则基本是从音调变化最丰富的弦乐发展起来的。弦乐利用琴弦的振动发出声音，振动频率越高，音调就越高，而在材质、粗细相同的情况下，振动频率则由琴弦的长短来决定。一般来说，相邻两根弦中一根长度只有另一根一半的弦，其振动频率是后者的两倍。通过观察发现，如果连续排列的那些弦与最长的弦之间成等比例的话，弹奏出的声音最好听。可见，好音乐之所以能让人感到悦耳，关键在于各个音的振动频率尽可能成简单整数比。最和谐的比例是2，此时两个音的音调听起来几乎完全重合，被称为“一个八度”。在一个八度内建立音阶，令任何相邻两音的振动频率都相等，这样就可以实现和音演奏，乐曲的情感内涵就会更加丰富。

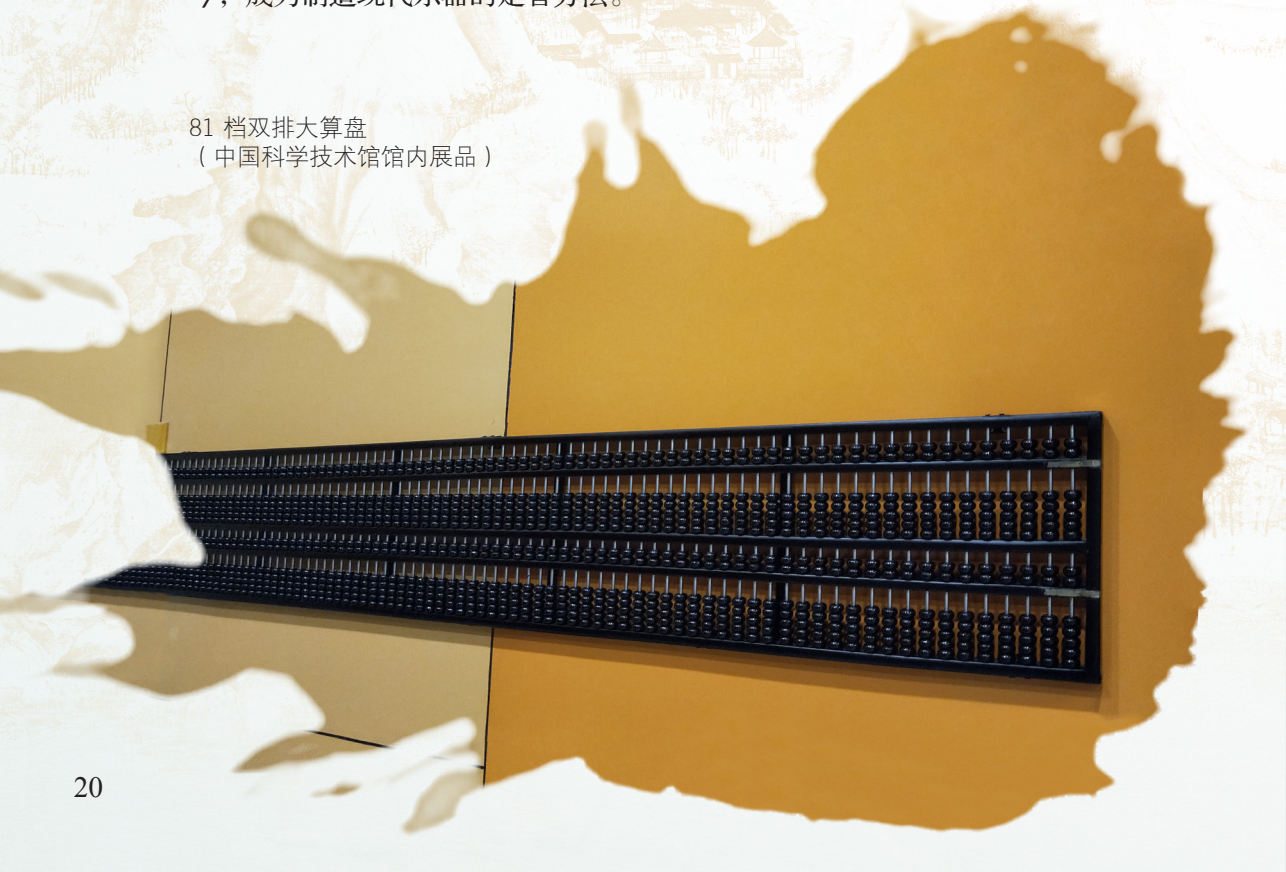
“夫乐也者，声音之学也；律也者，数度之学也。”这是素有“律圣”之称的明代科学家、艺术家朱载堉对于数学计算之于律学重要性的深刻认识。“律”指音阶中每个音的音高规律。春秋后期，中国最早的国别体史



书《国语》在世界上最早提到了十二律，即将一个八度分为十二个律。但此时十二律中相邻两律间的频率比不是 2，而是 2.02728，即不平均，因此被称为“十二不平均律”。这样的音律无法实现和音，听起来干涩而单调。

为了把一个八度平分为十二等份，使各相邻两律间的频率比完全相同，必须进行极其复杂而周密的计算。1584 年，朱载堉在其著作《律学新说》中用等比数列平均划分音律，用自制的 81 档双排大算盘，首创开平方、开立方的计算方法，并将有效数字精确到小数点后 24 位，为历代数学家所不及。在世界范围内，朱载堉最早解决了已知等比数列的首项、末项和项数，以及不同进位制的小数换算问题，最终求得了十二律之间完全平均的音高关系，被称为“十二平均律”，即“十二等程律”。十二等程律的发明攻克了 2000 多年的音乐难题，并一直被沿用至今，成为制造现代乐器的定音方法。

81 档双排大算盘
(中国科学技术馆馆内展品)





因此，十二等程律堪称影响中国乃至世界音乐发展的重大科技发明。

1722年，“西方近代音乐之父”巴赫使用十二等程律创作《平均律钢琴曲集》，比中国晚了1个多世纪。西方的第一件十二等程律乐器是钢琴，钢琴的挑弦法是敲击以十二等程律设置的钢丝弦，这与朱载堉用手弹拨以十二等程律为准的丝弦在本质上完全一致，因此，朱载堉被誉为“钢琴理论的鼻祖”。

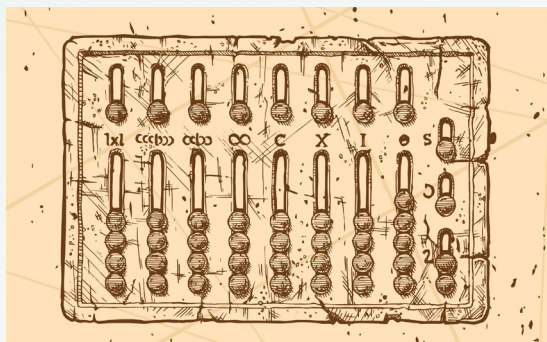


十二等程律和律管
(中国科学技术馆内展品)

律管指以竹或金属制成的定音器具。通过改变律管的长度和口径，可以发出不同频率的音响。朱载堉运用十二等程律，设计出能够满足任意音律需求的律管，将13支或更多律管编排在一起，便成为定音标准器。至此，朱载堉用理论和实践共同证实了十二等程律。

影响世界的中国古典数学

算盘并非中国人所独有。近年来，考古学家出土了前900年的美索不达米亚阿兹特克算盘，据分析，其记分盘是将玉米粒用细绳穿起来放在木框里做成的。1世纪，算盘在古罗马已成为极为普通的计算工具。罗马的



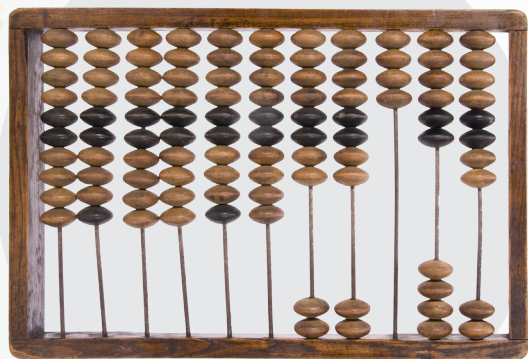
沟算盘

算盘有两种，一种与中国算盘一样带有滑杆；另一种则用沟槽代替滑杆，算珠用金属小圆球制成，在沟槽中滑动，不固定在算盘之上，因此被称为“沟算盘”。和材料轻、成本低的

中国竹木算盘相比，古罗马算盘早期为泥制，后期改为金属制作，两类材质一类不易保存，另一类笨重昂贵，因此未能像中国算盘一样被广泛使用，而是被逐渐淘汰。

俄罗斯算盘的产生年代不晚于 17 世纪，因在欧洲广为流传，故又被

称为“欧洲算盘”。俄罗斯算盘无横梁，向上凸起的弧形档更便于拨珠，每档有 10 颗算珠，中间两颗颜色异于其他算珠，便于记数，可进行整数的加、减、乘、除及分数运算。



欧洲算盘

明代末年，中国算盘专著和计算口诀传入日本、朝鲜、越南等国。日本工匠仿制中国算盘进行销售，结果各地争相

购买，算盘遂流行于日本。经过数百年的发展和演变，1946 年，美国军队对日本算盘的有效程度进行了测验。美国军队用电子计算机和日本算盘进



行速度和准确率两方面的较量，每台计算机都由训练有素的操作员操作，跟算盘一起进行加、减、乘、除四则运算，结果算盘以 4:1 的大比分战胜了电子计算机。

当算盘在中国得到广泛使用的同时，苏格兰人纳皮尔在 1594 年发明了能够计算特殊多位数之间乘积的方法——对数。利用对数，人们发明了计算滑尺、圆算尺等不同计算工具，直到 1632 年奥特雷德发明了计算尺。人们通过将计算尺游标上的标线和其他固定尺上的刻度对齐，观察尺子上其他记号的相对位置，便可以迅速读出运算结果。但有意思的是，计算尺虽然可以进行乘除运算，却不能进行更为简单的加减运算。另外，计算尺上的数没有小数点，计算结果的小数点位置要靠估算来确定，增加了计算错误的风险。但无论如何，在计算器出现之前的几百年时间里，计算尺不断发展，如同显微镜代表微生物学一样，计算尺一度作为工程师的象征而被广泛使用，逐渐成为欧洲计算工具发展历史上光辉的一页。

在世界范围内，虽然古代其他文明也有算板、算盘等计算工具，但无论就其发明时间、使用范围、持续使用时间，还是计算的简便、快速方面来说，都远逊于中国算盘。另外，除了正整数计算，中国不但是世界上对负数、分数、小数认知最早的国家，而且也是针对这些记数方式提出运算方法最早的国家。中国古代数学家在计算方面展现了高度的技巧，并凭借优良的计算工具发展出了独具特色的中国古典数学。以计算为中心、集秦汉数学之大成的中国古代第一部数学专著《九章算术》的成书，使中国取代古希腊成为当时世界数学研究的中心。